Matrix-Exponentialfunktion

Betrachten Sie die Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator $m\ddot{x} = -\kappa x$, mit $\kappa = m\omega^2$, und schreiben Sie diese mit dem Impuls $p = m\dot{x}$ als ein System von Differenzialgleichungen erster Ordnung in Matrixform. Die erhaltene Beziehung nimmt in den Variablen $\tilde{p} := p/\sqrt{m\omega}$ und $\tilde{x} := x\sqrt{m\omega}$ eine einfache Gestalt an. Die Lösung erfolgt durch Auswerten einer Matrix-Exponentialfunktion, was auf zwei unterschiedlichen Wegen erfolgen soll.

(a) Wie können Sie mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion $\exp M$ für M=? die Lösung $(\tilde{x}, \tilde{p})(t)$ als Funktion der Anfangswerte $(\tilde{x}, \tilde{p})(0)$ schreiben?

(b) Geben Sie $\exp M$ in Form einer Potenzreihe an.

(c) Berechnen Sie zunächst die Potenzen M^k für $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Daran können Sie das Bildungsgesetz für alle höheren Potenzen ablesen. Fassen Sie getrennt alle geraden und alle ungeraden Potenzen in $\exp M$ zusammen. Das Erkennen der Taylorreihen bekannter Funktionen sollte mit Blick auf die bekannte Oszillatorlösung ein „Aha"-Erlebnis auslösen.

(d) Beweisen Sie die Beziehung $\exp(M) = U^{-1} \exp(UMU^{-1})\, U$ für eine invertierbare Matrix U, indem Sie in der Potenzreihe geeignete Ausdrücke zusammenfassen.

(e) Die soeben bewiesene Identität ist besonders nützlich, falls U so gewählt wird, dass $UMU^{-1} =: D$ eine Diagonalmatrix ergibt. Wie ist U im vorliegenden Fall zu wählen? Erhalten Sie wiederum die bekannte Lösung?

Hinweis: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad-bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Rotationen

Die Rotation $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ eines Vektorfeldes $\vec{A}$ ist ein Maß für dessen Wirbelstärke. Ihr Verschwinden (in einem einfach zusammenhängenden Gebiet) ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer skalaren Funktion ϕ (Potenzial), mit der $\vec{A} = \vec{\nabla}\phi$ gilt.

(a) Für das auf $\mathbb{R}^3$ definierte Vektorfeld

$$\vec{A} \doteq (\ axy - z^3\ ,\ (a-2)\, x^2\ ,\ (1-a)\, xz^2\ )$$

bestimme man $a \in \mathbb{R}$ so dass $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{A} = \vec{\nabla}\phi$ und finde $\phi = \phi(x, y, z)$.

(b) Berechnen Sie die Zirkulation $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{r}$ des Ortsvektors $\vec{r}$.